СА КОРЕКТУРОМ

# АПОКАЛИПСА МАТЕМАТИКЕ
# 2021. године

Рад под овим називом даје једно решење поделе угла на три једнака дела и поделу угла на *n* једнаких делова употребом једног шестара и једног лењира у коначном броју поступака.

Овај рад се доставља преко Интернет мреже свим становницима наше планете који су заинтересовани за ово решење.

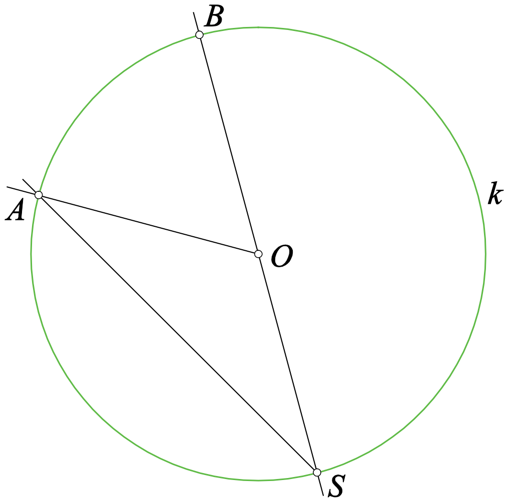
Рад је представљен на српском и енглеском језику. Завршну рецензију и објављивање у математичком часопису и на Интернет мрежи обавиће заједно математичке асоцијације држава: САД, Руске федерације и НР Кине.

Пошто нисам у могућности да направим квалитетан превод на руски и кинески језик унапред се извињавам.

У случају повољног исхода за овај рад уследиће велике награде државама: САД, Руској федерацији и НР Кини као и мрежи Интернет.

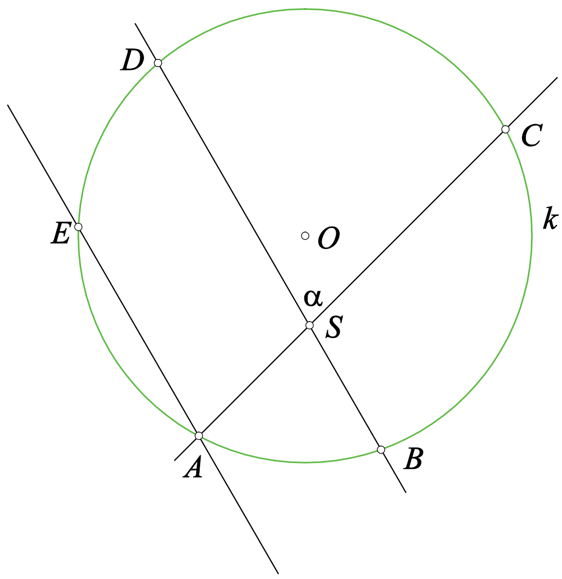
Ради лакшег разумевања помоћ ће нам пружити неке теореме и констатације које наводим.

1) Сваком кружном луку $\widehat{AB}$ на кружници $k(o,r)$ одговара централни угао α и периферни угао $\frac{\alpha}{2}$ . Слика 1.




Слика 1

2) Уколико је теме угла $\alpha$ унутар кружнице $k(o,r)$, углу $\alpha$ припадају два кружна лука $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$. Слика 2. Збир ових лукова једнак је луку $\widehat{EC}$ уколико је тачка $A$ на кружници $k$ и уколико су тачке $A$, $S$ и $C$ колинеарне, а права $AE$ је паралелна правој $BD$.




$$\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{EC}$$

Слика 2

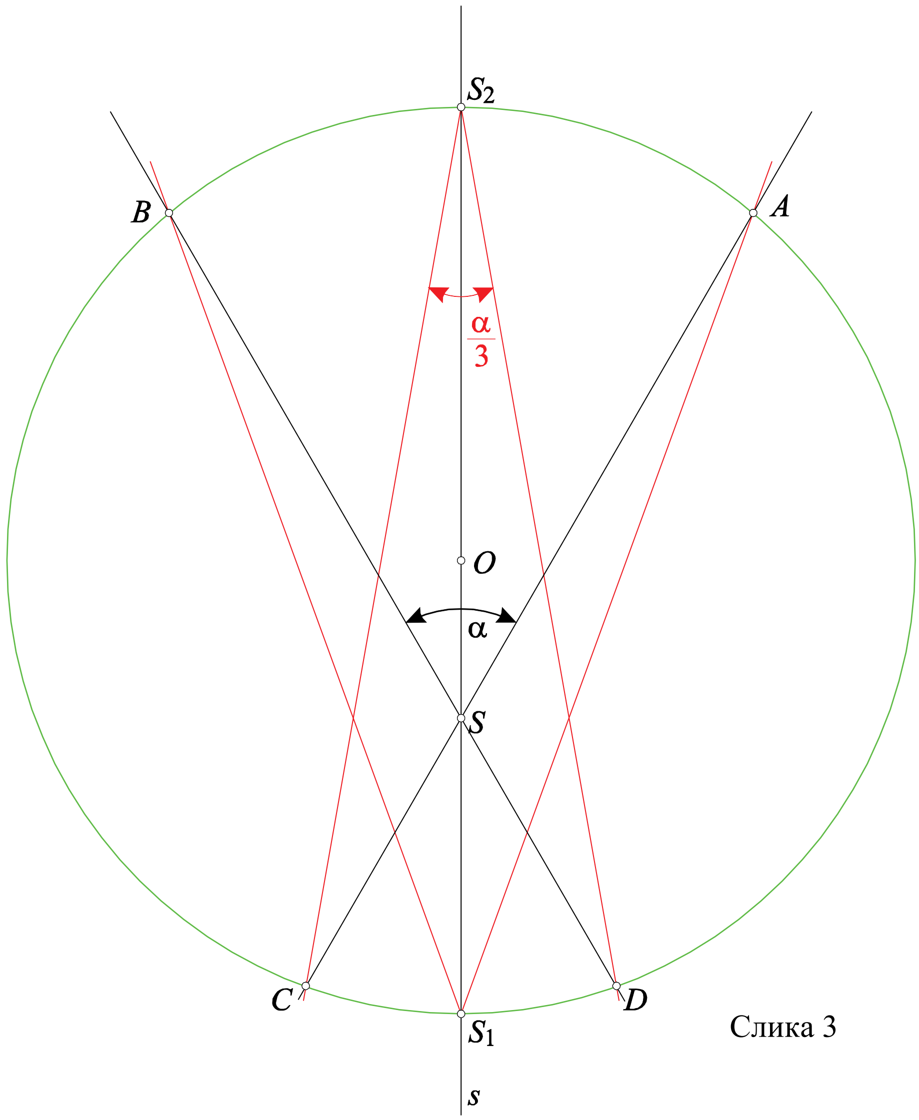
Последња једнакост је тачна јер су лукови $\widehat{AB}$ и $\widehat{ED}$ једнаки као лукови између паралелних тетива на истој кружници.

# I

# ПОДЕЛА УГЛА α НА ТРИ ЈЕДНАКА ДЕЛА

У сврху овог доказа, прихватимо једну констатацију и докажимо теорему 1:

**Констатација 1**: Ако је код кружнице *k*(*o,r*) теме угла α у унутрашњости кружнице и ако је лук $\widehat{AB}$ два пута већи од унакрсног лука $\widehat{CD}$, тада је угао α подељен на три једнака дела. Слика 3.




Слика 3

$\sphericalangle S_2CA = \sphericalangle S_2DB = \sphericalangle CS_2D$ јер је *s* симетрала угла α и лука $\widehat{AB}$. Коначно

$$\sphericalangle AS_1B = 2 \cdot \sphericalangle CS_2D = \frac{2\alpha}{3}$$

**Теорема 1:** нека нам је у кружници $k_2(O_2, O_2A)$ дат централни угао $\alpha = \sphericalangle AO_2B$ и нека су тачке *A* и *B* на кружници $k_2$. Слика 4.

Нека је права *s* симетрала угла α и лука $\widehat{AB}$ као и лука $\widehat{IH}$ $(I \in k_2 \wedge H \in k_2)$ који је једнак половини лука $\widehat{AB}$.

Нека су праве $i$ и $h$ праве које садрже тачке *I* и *H*, а које су паралелне оси *s*, тада праве $i$ и $h$ секу продужетке кракова угла α преко темена $O_2$ у тачкама *I'* и *H'* тако да је $\widehat{IH} = \widehat{I'H'}$.

Тачке *I, H, I'* и *H'* припадају кружници $k_3(O_3, O_3I)$. (Тачка $O_3$ је пресек симетрале *s* и праве *IH'* ).

Конструишимо $k_3(O_3, O_3I)$.

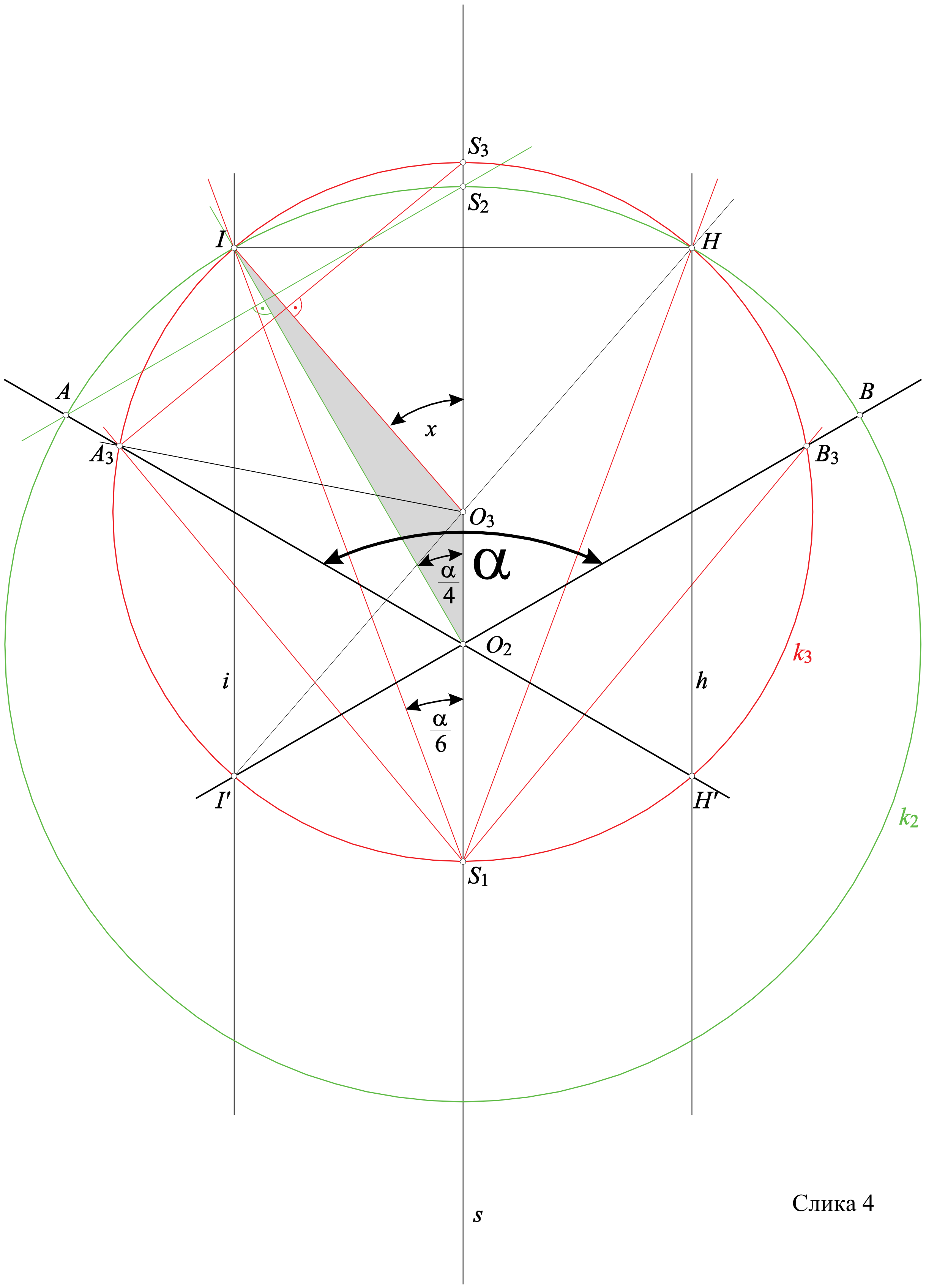
Њене пресеке са крацима угла α обележимо са $A_3$ и $B_3$. Оса *s* сече кружницу $k_3(O_3, O_3I)$ у тачкама $S_1$ и $S_3$, а кружницу $k_2$ у тачки $S_2$.

Из услова наведених у досадашњем тексту теореме 1 тврдимо: Кружнице $k_2$ и $k_3$ поред заједничке тетиве *IH* имају једнаке тетиве:

$AS_2 = A_3S_3$

<u>Доказ:</u> Приликом представљања Слике 4 узели смо у обзир једнакост следећих тетива:

$AS_2 = BS_2 = IH = I'H'$ .



$S_3$
$S_2$
$I$
$H$
$A$
$B$
$A_3$
$B_3$
$x$
$O_3$
$\alpha$
$\frac{\alpha}{4}$
$O_2$
$k_3$
$i$
$h$
$\frac{\alpha}{6}$
$I'$
$H'$
$k_2$
$S_1$
$s$


Слика 4

Посматрајмо троугао $AO_2S_2$ код кружнице $k_2$ и њен полупречник $O_2I$ који је нормалан на тетиви $AS_2$ . Зато је

$$AS_2 = 2 \cdot r_2 \sin\frac{\alpha}{4} \quad (1)$$

Из троугла $A_3O_3S_3$ код кружнице $k_3$ права $O_3I$ је нормална на тетиви $A_3S_3$. Зато је:

$$A_3S_3 = 2 \cdot r_3 \sin x \quad (2), \quad \sphericalangle x = \sphericalangle IO_3S_3$$

Применом синусне теореме на троугао $IO_2O_3$ имамо:

$$r_2 : r_3 = \sin x : \sin\frac{\alpha}{4} \quad (3), \quad \text{одавде је}$$

$$r_3 = \frac{r_2 \cdot \sin\frac{\alpha}{4}}{\sin x} \quad (4)$$

Уврстимо ли $r_3$ из релације (4) у релацију (2) имамо:

$$A_3S_3 = 2 \cdot \frac{r_2 \sin\frac{\alpha}{4}}{\sin x} \cdot \sin x = 2r_2 \sin\frac{\alpha}{4} \quad \text{Браво!}$$

Ова вредност је једнака вредности у релацији (1), па је:

$$AS_2 = A_3S_3$$

Овим је доказана теорема 1.

Сада код кружнице $k_3$ углу $\alpha$ одговарају два лука, $\overset{\frown}{A_3B_3}$ и $\overset{\frown}{I'H'}$ па је још:

$\overset{\frown}{A_3B_3} = 2\,\overset{\frown}{I'H'}$ па пишемо коначно

$$\sphericalangle IS_1H = \frac{\alpha}{3} \quad \text{и} \quad \sphericalangle A_3S_1B_3 = 2\frac{\alpha}{3}, \qquad \sphericalangle x = \frac{\alpha}{3}$$

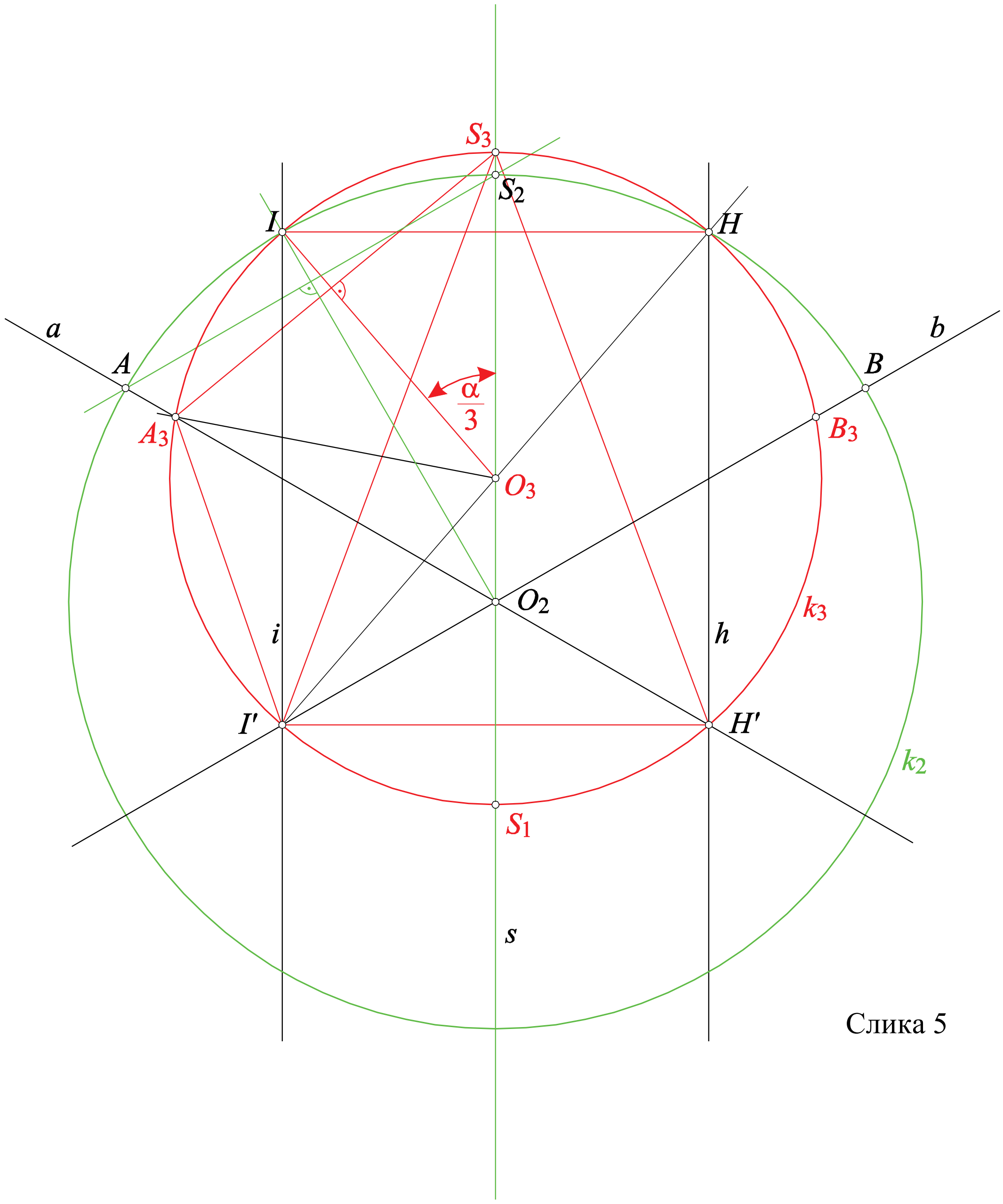
(**Осврт**: Од када се човечанство бави математиком, релација (3) први пут даје начин да се израчуна или конструише угао $\frac{\alpha}{3}$ уз помоћ угла $\frac{\alpha}{4}$, произвољне дужи $O_2I = r_2$ и на основу ње конструисање дужи $O_3I = r_3$, без појаве трансцедентних бројева)

Сада, констатацију (1) и теорему (1) сматрамо анализом поделе угла на три једнака дела, јер на основу њих добијамо идеју за конструкцију угла $\frac{\alpha}{3}$ ако знамо угао $\alpha$.

<u>Пример 1:</u> Дати угао $\alpha$ поделити на три једнака дела.

1) Анализа: Констатацијом (1) и теоремом (1) обавили смо анализу и према добијеној идеји вршимо конструкцију:

2) Конструкција: нека нам је у равни дат угао $\alpha = \sphericalangle aO_2b$. Конструишимо симетралу $s$ угла $\alpha$ и кружницу $k_2(O_2, OA)$, где је $A$ произвољна тачка на краку $a$ угла $\alpha$. Слика 5.




Слика 5

Када симетрала $s$ сече кружницу $k_2$ у тачки $S_2$ тада је лук $\widehat{AS_2} = \widehat{BS_2}$. Пошто су према анализи тачке $I$ и $H$ на средини лукова $\widehat{AS_2}$ и $\widehat{BS_2}$. Тада је код кружнице $k_2$

$\widehat{AS_2} = \widehat{BS_2} = \widehat{IH}$.

Из тачака $I$ и $H$ конструишимо праве $i$ и $h$ које су паралелне оси $s$, а које секу продужетке кракова угла $\alpha$ у тачкама $I'$ и $H'$. Конструишимо праву $I'H$. Према анализи она у пресеку са правом $s$ одређује тачку $O_3$. Конструишимо кружницу $k_3$. Кружница $k_3$ сече осу $s$ у тачкама $S_1$ и $S_3$ а краке угла $\alpha$ у тачкама $A_3$ и $B_3$.

Конструишимо тетиве $A_3S_3$ и $B_3S_3$ као и тетиве $I'H'$ и $AS_2$.

На основу теореме (1) је $AS_2 = A_3S_3 = IH = I'H'$ и

$$\sphericalangle A_3H'S_3 = \sphericalangle B_3I'S_3 = \sphericalangle I'S_3H' = \frac{\alpha}{3}$$

чиме је конструкција завршена.

3) Доказ. Да су периферни углови

$$\sphericalangle I'S_3H' = \frac{\alpha}{3} \wedge \sphericalangle A_3H'S_3 = \sphericalangle B_3I'S_3 = \frac{\alpha}{3}$$

следи из теореме (1) и конструкције.

4) Дискусија: Задатак има јединствено решење ако је угао $\alpha \leq \pi$. Уколико је $\alpha > \pi$ доћи ће до преклапања лукова на кружници $k_3$, што може стварати забуне.

**Током целокупног поступка конструкције користили смо само један шестар и један лењир у коначном броју поступака.**

## Последице овог рада и могуће примене

- На основу ове поделе угла на три једнака дела, узастопном применом овог поступка долазимо до углова

$$\frac{\alpha}{3^k}, \qquad k \in N$$

такође добијамо и поделу

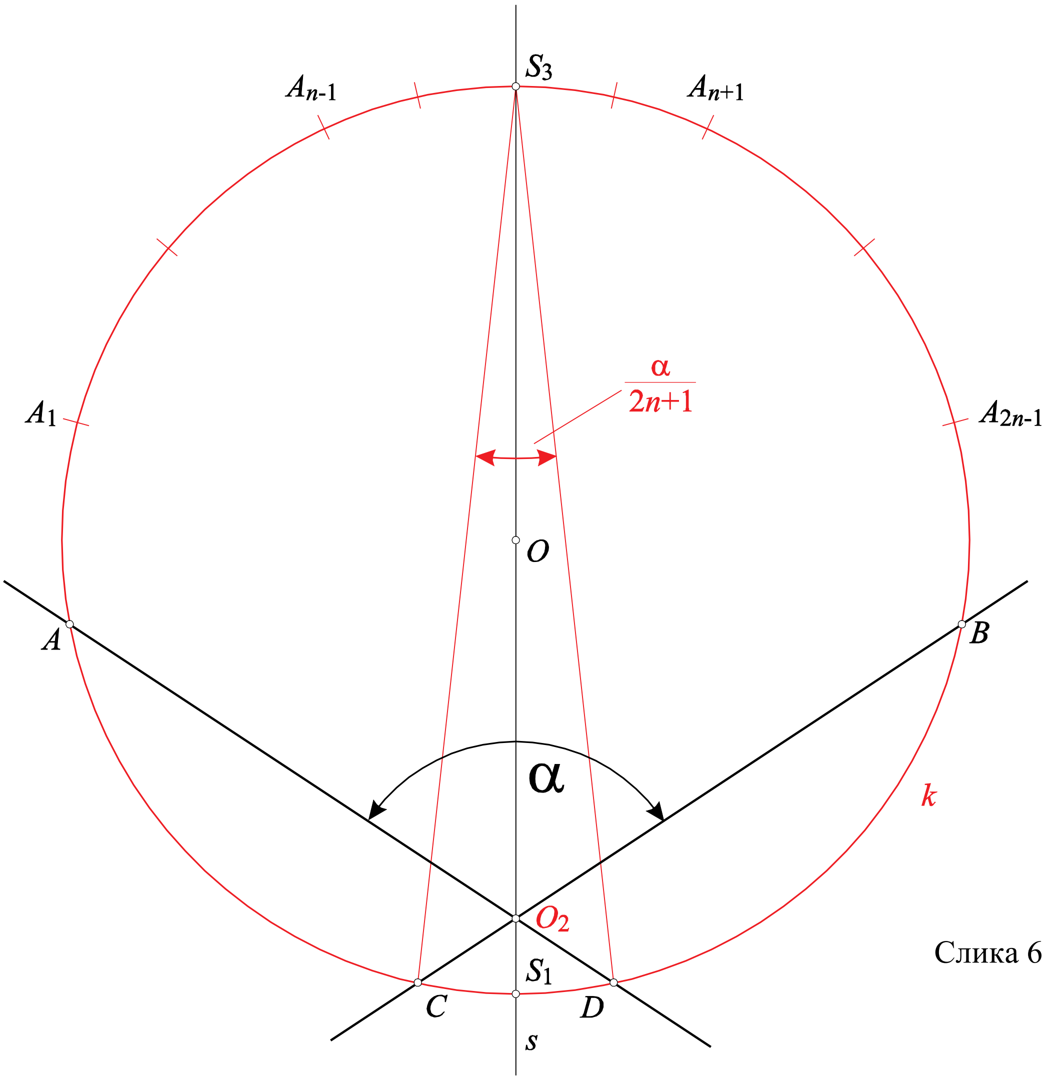
$$\frac{\alpha}{3^k 2^r}, \qquad k, r \in N$$

- Ако делимо угао од 360° или његових делова, можемо конструисати велики број правилних многоуглова.

## II

## ПОДЕЛА УГЛА $\alpha$ НА $\frac{\alpha}{2n+1}$ ЈЕДНАКИХ ДЕЛОВА УКОЛИКО ЗНАМО ПОДЕЛУ $\frac{\alpha}{2n}$, $n \in N$

**Констатација 2**: Ако је код дате кружнице $k(o,r)$ угао $\alpha = \sphericalangle AO_2B$ подељен на два дела чији су лукови $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$ такви да је $\widehat{AB} = 2n \cdot \widehat{CD}$ , тада је код кружнице $\kappa$ угао $\sphericalangle CS_3D = \dfrac{\alpha}{2n+1}$ Слика 6.




Слика 6

Теорема 2:

Нека нам је дат угао $\alpha = \sphericalangle AO_2B$ који је на луку $\widehat{AB}$ подељен тачкама $A, A_1 \dots A_{n-1}, S_2, A_{n+1}, \dots A_{2n-1}, B$ на $2n$ једнакинх делова. Нека су тачке $I$ и $H$ на кружници $k_{2n}$ између тачака $A_{n-1}$ и $S_2$ као и између тачака $S_2$ и $A_{n+1}$ тако да се тачке $I$ и $H$ налазе на средини тих делова (лукова) и нека је:

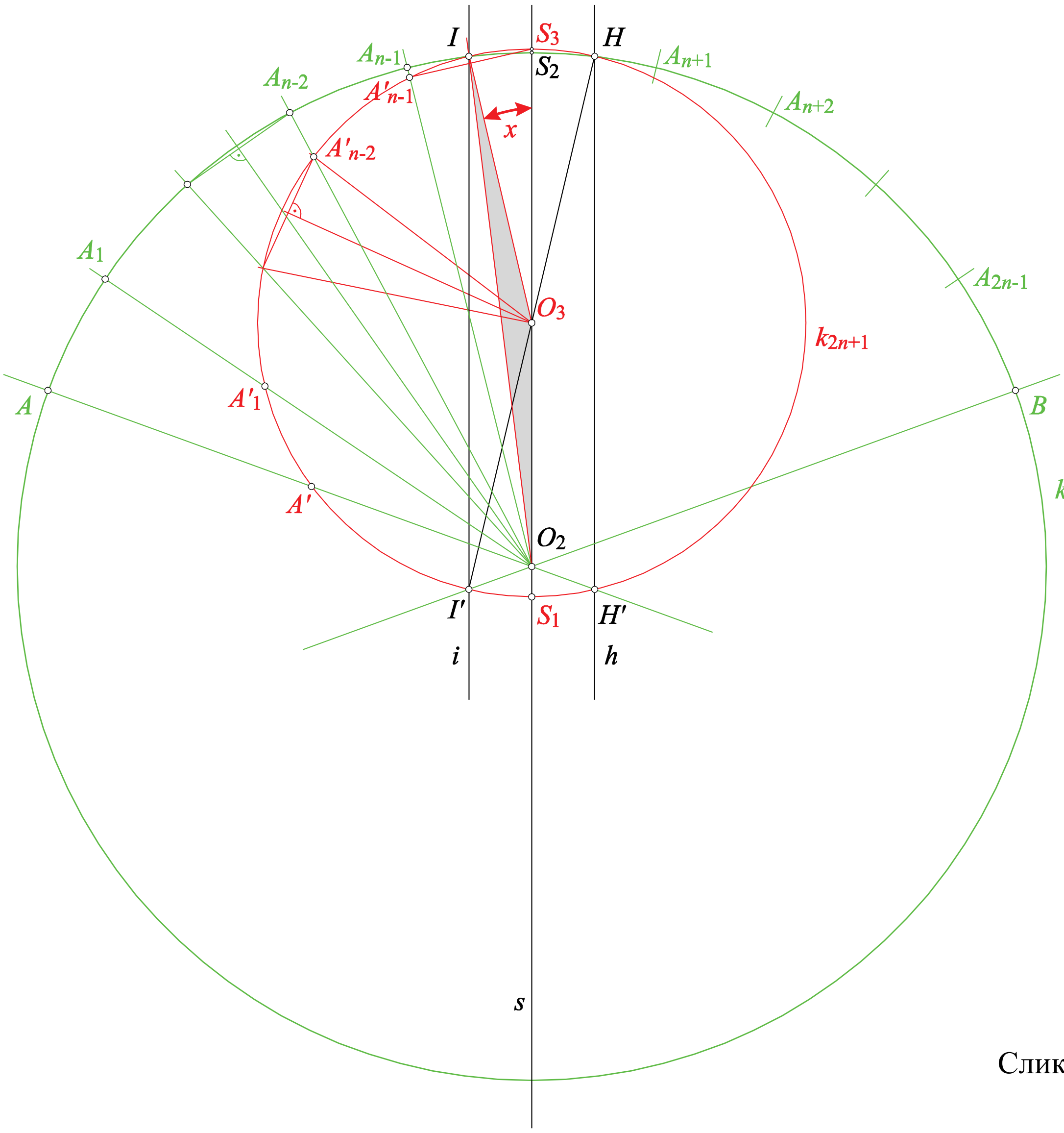
$\widehat{IH} = \widehat{A_{n-1}S_2} = \widehat{S_2A_{n+1}}$.

Нека је $s$ симетрала угла $\alpha$ и симетрала лука $\widehat{IH}$ и нека права $s$ сече кружницу $k_{2n}(O_2O_2A)$ у тачки $S_2$.

Нека су праве $i$ и $h$ такве да је $I \in i$ и $H \in h$ које су паралелне оси $s$. Нека праве $i$ и $h$ секу продужетке кракова угла $\alpha$ преко темена $O_2$ у тачкама *I'* и *H'*. Сада су тачке *I*, *H*, *I'* и *H'* четири тачке исте кружнице $k_{2n+1}$ чији је центар тачка $O_3$ која се налази у пресеку симетрале *s* и праве *I'H*, а полупречник кружнице $k_{2n+1}$ је $r_{2n+1} = O_3I$. Конструишимо кружницу $k_{2n+1}$. Она са кружницом $k_{2n}$ има заједничке тачке *I* и *H* и тетиву *IH*. Кружница $k_{2n+1}$ сече краке угла $\alpha$ у тачкама *A'* и *B'*. Ова кружница сече осу *s* у тачкама $S_1$ и $S_3$. Слика 7.

Спојимо ли тачку $O_2$ са тачкама $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}, I$ добијамо полупречнике кружнице $k_{2n}$ који секу кружницу $k_{2n+1}$ у тачкама $A_1', A_1'', A_2', A_2'', \ldots A_{n-1}', A''_{n-1}, I$ и $I''$.

Тачке са ознаком $'$ налазе се на сегменту кружнице $k_{2n+1}$ од тачке $A'$ до $S_3$. Тачке са ознаком $''$ налазе се на сегменту кружнице $k_{2n+1}$ од тачке $S_1$ до тачке $H'$ и нису обележене због недостатка простора. Угао између ових полупречника код тачке $O_2$ износи $\frac{\alpha}{2n}$. Слика 7.




Слика 7

Тврђење теореме 2. Тетиве $A'A'_1, A'_1A'_2, \dots A'_{n-1}S_3$ које наведени полупречници $O_2A_1, O_2A_2 \dots$ граде између себе на кружници $k_{2n+1}$ су једнаке и износе $IH$.

Како угао из тачке $O_2$ за сваку тетиву износи $\frac{\alpha}{2n}$, а периферни угао код кружнице $k_{2n+1}$ за сваку износи $\frac{\alpha}{2n+1} = \sphericalangle x$.

<u>Доказ:</u> Луку $\widehat{AS_2}$ припада *n* једнаких тетива $IH$ за централни угао $\sphericalangle AO_2S_2 = \frac{\alpha}{2}$ код кружнице $k_{2n}$.

Такође луку $\widehat{A'S_3}$ припада $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ једнаких тетива $IH$ за угао $\sphericalangle A'O_2S_3 = \frac{\alpha}{2}$ код кружнице $k_{2n+1}$. Израз $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ односи се на лук $\widehat{A'S_3} = n \cdot \left(\widehat{IH}\right)$, док је лук $\widehat{S_1H'} = \frac{1}{2}\left(\widehat{IH}\right)$. Изрази: $n \cdot \frac{\alpha}{2n}$ и $\frac{\alpha}{2n+1} \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)$ су једнаки јер одговарају углу $\frac{\alpha}{2}$.

Значи $n \cdot \frac{\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2n+1} \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)$ постаје идентитет множењем једнакости са $2n \cdot (2n+1)$.

Иако је показана једнакост тетива код $k_{2n}$ и $k_{2n+1}$, посматрајмо на слици 9 тетиве $A_{n-1}S_2$ и $A'_{n-1}S_3$. На основу досадашње анализе је:

$$O_2A_{n-1} = r_{2n}, \qquad O_3I = r_{2n+1}, \qquad \sphericalangle IO_3S_3 = \sphericalangle x \text{ и } \sphericalangle IO_2O_3 = \frac{\alpha}{4n}$$

Применом синусне теореме на троугао $IO_2O_3$ је:

1) $$r_{2n} : r_{2n+1} = \sin x : \sin\frac{\alpha}{4n} \Rightarrow r_{2n+1} = \frac{r_{2n} \cdot \sin\frac{\alpha}{4n}}{\sin x}$$

Тетиве $A_{n-1}S_2$ и $A'_{n-1}S_3$ износе:

2) $$A_{n-1}S_2 = 2 \cdot r_{2n} \cdot \sin\frac{\alpha}{4n}$$

3) $$A'_{n-1}S_3 = 2 \cdot r_{2n+1} \cdot \sin x$$

Ако из релације (1) вредност $r_{2n+1} = \dfrac{r_{2n} \cdot \sin\frac{\alpha}{4n}}{\sin x}$

уврстимо у релацију (3) добијамо:

$$A'_{n-1}S_3 = 2 \cdot \frac{r_{2n} \cdot \sin\frac{\alpha}{4n}}{\sin x} \cdot \sin x = 2r_{2n}\sin\frac{\alpha}{4n} = A_{n-1}S_2$$

Дошли смо до доказа о једнакости тетива код $k_{2n}$ и $k_{2n+1} \forall\, n \in N$.

У релацији (1):

$$r_{2n} : r_{2n+1} = \sin\frac{\alpha}{2n+1} : \sin\frac{\alpha}{2n}$$

где врло лако проналазимо једну величину уколико имамо остале три величине.

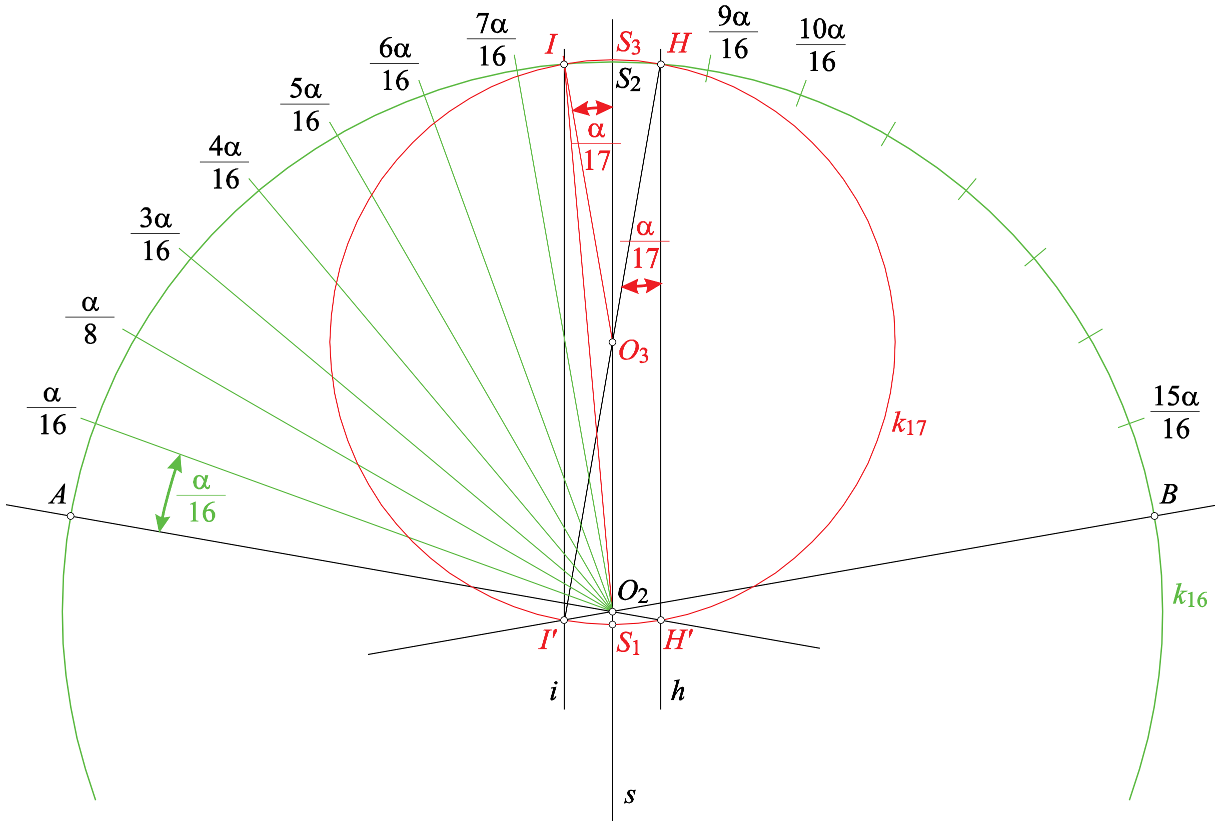
Први пут је успостављена веза између угла $\frac{\alpha}{2n}$, угла $\frac{\alpha}{2n+1}$, $r_{2n}$ и $r_{2n+1}$.

Подела угла α на три једнака дела је случај поделе угла α на $\frac{\alpha}{2n+1}$ за $n = 1$.

<u>Пример 1.</u> Датом углу $\alpha$ конструиши угао $\frac{\alpha}{17}$.

1) <u>Анализа</u>: Приказаном констатацијом (2) и теоремом (2) обављена је фаза анализе јер смо добили идеју за конструкцију угла $\frac{\alpha}{17} = \frac{\alpha}{2 \cdot 8+1}$ уколико знамо угао $\alpha$.

2) <u>Конструкција</u>: У равни је дат угао $\alpha = \sphericalangle AO_2B$. Половљењем угла $\alpha$ и његових делова долазимо до угла $\frac{\alpha}{16}$. Слика 8.




Слика 8

Поступком конструкције на основу теореме 2 налазимо тачке $I, H, I'$ и $H'$. Конструишемо кружницу $k_{17}(O_3, O_3I)$. Угао $I'HH' = \frac{\alpha}{17}$.

3) <u>Доказ</u>: Да је угао $\sphericalangle I'HH' = \frac{\alpha}{17}$ следи из констатације 2 и теореме 2.

4) <u>Дискусија</u>: Задатак има јединствено ако је $\alpha \leq 180°$.

(**Осврт 2**: Када код кружнице $k(O_2, O_2A)$ као на слици 7 имамо поделу на $2n$ једнаких лукова лука $\widehat{AB}$ и када један од тих лукова доведемо у положај $IH$, да је права $s$ његова симетрала конструкцијом правих $i$ и $h$, које су паралелне оси $s$ $(I \in i,\ H \in h)$а које секу продужетке кракова угла $\alpha$ преко темена $O_2$ у тачкама $I'$ и $H'$ тада је на основу констатације 2 $\sphericalangle II'H = \sphericalangle I'HH' = \frac{\alpha}{2n+1}$. Код оваквог поступка за доказ нам нису потребни теорема 2, као и конструкција кружнице $k_{2n+1}$.)

Примена: Када би вршили поделу угла $\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120°$ на 17 једнаких делова добили би да је: $3 \cdot \frac{\alpha}{17} = \frac{360°}{17}$, а то је централни угао правилног седамнаестоугла, кога одмах можемо конструисати.

Овај начин поделе угла $\alpha$ на $n$ једнаких делова пружа нам могућност конструисања сваког правилног многоугла чији је ценрални угао једнак $3 \cdot \frac{120°}{n}$.

Тешкоће које се јављају на пример када је $n = 35$ решавамо овако: $35 = 5 \cdot 7$. Прво угао а делимо на 5 (4 + 1) једнаких делова, затим један тај део делимо у трећем кораку на 7 (6 + 1) једнаких делова пошто је претходно подељен на 3 (2 + 1) део у другом кораку са половином угла крећемо у трећи корак јер знамо $\frac{\alpha}{2}$ и конструишемо $\frac{\alpha}{5 \cdot 7}$. Слично решавамо и остале ситуације. Такође, угао $\frac{\alpha}{35}$ можемо конструисати одмах након конструкције угла $\frac{\alpha}{17}$, тако што ћемо узети половину угла $\frac{\alpha}{17}$ и добити $\frac{\alpha}{34}$, а затим на описани начин добијамо $\frac{\alpha}{35}$.

Важна примена конструкције правилних многоуглова може се применити у алгебри за графичко решавање једначина $x^n - 1 = 0,\ n \in N$.

На јединичној кружници полупречника $r = 1$ сва решења једначине $x^n - 1 = 0$ се налазе на кружници. Прво решење је

$$Z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ \sin\frac{2\pi}{n}$$

Свако наредно решење добијамо множењем претходног са $Z_1$. Ово се може користити и за факторизацију полинома $x^n - 1$.

Ужице, Србија М. Бошковић, проф.

01. јун 2021. 31000 Ужице, Сењак 25, Србија